入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

名古屋大学（理系）

対象年度： 2023 年

試験時間： 150 分

問題数： 4 問

問　題　紙

$\boxed{1}$ 実数係数の 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ を解に持ち，それらは全て複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α，β と共役な複素数を表す。

(1) $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ を示せ。

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$，$u = \beta + \overline{\beta}$ とおく。p，q，r，s をそれぞれ t と u で表せ。

(3) 座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ $0 < b < a$ とする。xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}\,(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}\,(a-b,\ 0)$ をとる。D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする。xyz 空間において A を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい。

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(r(a)-a)$ を求めよ。

$\boxed{3}$

(1) 方程式 $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。

(2) $y = x(x^2-3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点の個数を求めよ。

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x) = x(x^2-a)$ を考える。$y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

$\boxed{4}$ n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m\, x^m$ と表す。

(1) 等式 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} {}_n\mathrm{B}_m = n!$ を示せ。

(2) 等式

$$P_n(x+1) = \sum_{m=1}^{n} \left({}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_n\mathrm{B}_m \cdot {}_m\mathrm{C}_m x^m\right)$$

を示せ。ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である。

(3) $k = 1$，2，$\cdots$，n に対して，等式 $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} {}_n\mathrm{B}_j \cdot {}_j\mathrm{C}_k = {}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ。