

入学試験過去問題
数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2020年

試験時間：150分

問題数：4問

第 1 問

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C_1 , $x < 0$ の部分を C_2 とする。以下の間に答えよ。

- (1) 直線 $ax - by = 1$ が C_1 , C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための a , b の条件を求めよ。
- (2) a , b は (1) で求めた条件をみたすものとする。点 $A(a, b)$ をとり, 直線 $ax - by = 1$ と C_1 , C_2 の交点をそれぞれ P , Q とする。このとき $\triangle APQ$ の面積 S を a , b を用いて表せ。
- (3) 面積 S の最小値を求めよ。また, その最小値をとるための a , b の条件を求めよ。

第 2 問

3つの数 2 , $m^2 + 1$, $m^4 + 1$ が相異なる素数となる正の整数 m が1つ固定されているものとする。以下の問に答えよ。

- (1) 3つの数 2 , $m^2 + 1$, $m^4 + 1$ のうち, 1つを a とし, 残りの2つを b , c とする。このとき $a^2 < bc$ となる a をすべて求めよ。
- (2) 正の整数 x , y が $(x + y)(x^2 + 2y^2 + 2xy) = 2(m^2 + 1)(m^4 + 1)$ をみたしているとき x , y を求めよ。

第 3 問

以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ は、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leq x \leq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき、区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で $F(x) \geq 0$ であることを示せ。

- (2) $f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geq 0$$

を示せ。

- (3) 関数 $g(x)$ は、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき、

$$\int_0^{2\pi} g(x) \sin x \, dx \geq 0$$

を示せ。

第 4 問

2 名が先攻と後攻にわかれ、次のようなゲームを行う。

- (i) 正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A, B, C, D とする。両者はコマを 1 つずつ持ち、ゲーム開始時には先攻の持ちコマは A, 後攻の持ちコマは C に置いてあるとする。
- (ii) 先攻から始めて、交互にサイコロを振る。ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない。また余りが 1 のときは、自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし、余りが 2 のときは、自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば、その時点でゲームは終了とし、サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき、以下の間に答えよ。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) p_n を求めよ。
- (3) このゲームは後攻にとって有利であること、すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} p_{2m-1} \leq \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[a]$ は、その整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を表す。