入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

名古屋大学（理系）

対象年度： 2020 年

試験時間： 150 分

問題数： 4 問

問　題　紙

1　双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C_1，$x < 0$ の部分を C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1)　直線 $ax - by = 1$ が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための a，b の条件を求めよ。

(2)　a，b は (1) で求めた条件をみたすものとする。点 $\mathrm{A}\,(a,\ b)$ をとり，直線 $ax - by = 1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を a，b を用いて表せ。

(3)　面積 S の最小値を求めよ。また，その最小値をとるための a，b の条件を求めよ。

2　3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする。以下の問に答えよ。

(1)　3 つの数 2，m^2+1，m^4+1 のうち，1 つを a とし，残りの 2 つを b，c とする。このとき $a^2 < bc$ となる a をすべて求めよ。

(2)　正の整数 x，y が $(x+y)(x^2+2y^2+2xy) = 2(m^2+1)(m^4+1)$ をみたしているとき x，y を求めよ。

3　以下の問に答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2)　$f(x)$ を (1) の関数とするとき

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

(3)　関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき，

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

を示せ。

4　2 名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i)　正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A，B，C，D とする。両者はコマを 1 つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A，後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする。

(ii)　先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない。また余りが 1 のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが 2 のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

(3)　このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} \leqq \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$$

が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[a]$ は，その整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。