

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2019 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

第 1 問

正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする。

- (1) I_1 を求めよ。必要ならば

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$$

を使ってよい。

- (2) $n \geq 3$ のとき, I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし, 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき, 小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

第 2 問

空間内に $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり、点 B と点 C は P 上ではなく、 P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B', C' とする。

- (1) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ を示せ。
- (2) $\angle B'AC' > \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) P 上の三角形 $AB'C'$ の辺の長さは短いものから $4, \sqrt{21}, 7$ であった。このとき、辺 AB の長さを求めよ。

第 3 問

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく、それを 10 進法で表すと、小数第 1 位は 0 であり、第 2 位は 0 以外の数であるとする。

- (1) このような n の中で最小のものを求めよ。
- (2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

第 4 問

正の整数 n に対して $1, 2, \dots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し、各添字 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 a_i の値が j であるとき、その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \rightarrow a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき、

$$(i) \quad a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$$

$$(ii) \quad a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$$

$$(iii) \quad a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$$

となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル、列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\frac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。