

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2018 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

第 1 問

自然数 n に対し, 定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ を考える。このとき, 次の問に答えよ。

(1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき (1), (2) を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

第 2 問

a を 1 より大きい実数とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は、存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ。
- (2) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。
- (3) 関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

第 3 問

p を素数, a, b を整数とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) $(a + b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ。
- (2) $(a + 2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ。
- (3) $(a + 2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

第 4 問

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則 (a), (b) に従って移動する。

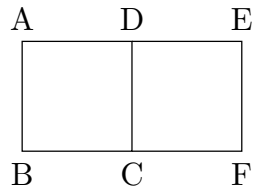


図 1

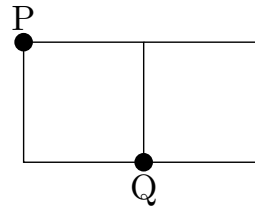


図 2

- (a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。
- (b) 点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいたことが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいたことが一度もなく、かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し、 $b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を、図 2 にならってすべて図示せよ。
- (2) a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。
- (3) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (4) $p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を示せ。