

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：4問

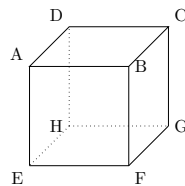
第 1 問

不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して、曲線 $C : y = a - 1 - \log x$ ($x > 0$) を考える。 s を正の実数とし、曲線 C 上の点 $P(s, a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s), 0)$ 、 $(0, v(s))$ とする。このとき、次の問に答えよ。必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明なしに使ってよい。

- (1) 関数 $u(s)$ 、 $v(s)$ を s の式で表せ。
- (2) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフを、増減・凹凸および交点の座標に注意して、同じ st 平面上に図示せよ。
- (3) 関数 $t = u(s)$ 、 $t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

第 2 問

下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geq 1$ に対して、(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n , (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n , (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n , とする。このとき、次の間に答えよ。



- (1) p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, p_n, q_n, r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。
- (4) 自然数 $m \geq 2$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき, $t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。

第 3 問

xyz 空間の 2 点 $A(0, 0, 2)$, $P(a, b, 0)$ を通る直線を l とする。また, 点 $(2, 0, 0)$ を中心とし, 半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し, S のうち z 座標が $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき, 点 Q の座標を a, b, t を使って表せ。
- (2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。
- (3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

第 4 問

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I), (II), (III) を満たしている。

- (I) 集合 M は n 個の要素からなる。
- (II) 集合 M の要素 z に対して、 $\frac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。
- (III) 集合 M の要素 z, w に対して、その積 zw は集合 M の要素である。ただし、 $z = w$ の場合も含める。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。
- (2) n は偶数であることを示せ。
- (3) $n = 4$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。
- (4) $n = 6$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。