

数 学

(理 科 系 学 部)

試 験 時 間 150 分

注 意 事 項

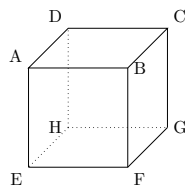
1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子は，問題紙，答案紙，数学公式集からなる。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問 題 紙

1 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して、曲線 $C: y = a - 1 - \log x$ ($x > 0$) を考える。 s を正の実数とし、曲線 C 上の点 $P(s, a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s), 0)$, $(0, v(s))$ とする。このとき、次の問に答えよ。
必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明なしに使ってよい。

- (1) 関数 $u(s)$, $v(s)$ を s の式で表せ。
- (2) 関数 $t = u(s)$, $t = v(s)$ の 2 つのグラフを、増減・凹凸および交点の座標に注意して、同じ st 平面上に図示せよ。
- (3) 関数 $t = u(s)$, $t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

2 下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n + 1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D , E , G のいずれかにいる。自然数 $n \geq 1$ に対して、(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B , D , E のいずれかにいる確率を p_n , (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C , F , H のいずれかにいる確率を q_n , (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n , とする。このとき、次の問に答えよ。



- (1) p_2 , q_2 , r_2 と p_3 , q_3 , r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n , q_n , r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。
- (4) 自然数 $m \geq 2$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき、 $t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。

3 xyz 空間の 2 点 $A(0, 0, 2)$, $P(a, b, 0)$ を通る直線を l とする。また、点 $(2, 0, 0)$ を中心とし、半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し、 S のうち z 座標が $z > 0$ を満たす部分を T とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき、点 Q の座標を a , b , t を使って表せ。
- (2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a , b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。
- (3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a , b に関する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

4 n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (I), (II), (III) を満たしている。
(I) 集合 M は n 個の要素からなる。
(II) 集合 M の要素 z に対して、 $\frac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。
(III) 集合 M の要素 z , w に対して、その積 zw は集合 M の要素である。ただし、 $z = w$ の場合も含める。
このとき、次の問に答えよ。

- (1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。
- (2) n は偶数であることを示せ。
- (3) $n = 4$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。
- (4) $n = 6$ のとき、集合 M は一通りに定まることを示し、その要素をすべて求めよ。

1

理科系

受 験 番 号				

数学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

1

(解答欄)

2

理科系

受 験 番 号				

数学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

2

(解答欄)

3

理科系

受 験 番 号				

数学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

3

(解答欄)

4

理科系

受 験 番 号				

数学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

4

(解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

(図 形 と 式)

$$6. \text{数直線上の2点 } x_1, x_2 \text{ を } m:n \text{ に内分する点, および外分する点: } \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

$$7. \text{点 } (x_1, y_1) \text{ と直線 } ax + by + c = 0 \text{ との距離, および点 } (x_1, y_1, z_1) \text{ と平面 } ax + by + cz + d = 0 \text{ との距離:}$$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8. \text{だ円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$9. \text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(ベ ク ト ル と 行 列)

$$10. \text{2つのベクトルのなす角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$11. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $(r = |z|, \theta = \arg z)$

13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β のとき, $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$

16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α, β, γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

20. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, $\left(\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2}n(a + \ell) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$, $(\ell = a + (n-1)d)$

25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $(r \neq 1)$

26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828 \dots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$34. \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \quad (a > 0), \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0), \quad \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列・組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起こる確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \quad (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$

