

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2009 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

- 第 4(A) 問と第 4(B) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

$a > 0$, $b > 0$ とする。点 $A(0, a)$ を中心とする半径 r の円が、双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と 2 点 $B(s, t)$, $C(-s, t)$ で接しているとする。ただし、 $s > 0$ とする。ここで、双曲線と円が点 P で接するとは、 P が双曲線と円の共有点であり、かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) r, s, t を、 a と b を用いて表せ。

(2) $\triangle ABC$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

第 2 問

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$g(\theta) = f(\cos \theta) - f(\sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で定める。

- (1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。
- (2) $g(\theta)$ を求めよ。
- (3) $y = g(\theta)$ のグラフをかけ。

第 3 問

行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, 座標空間の点 P_n の座標 (a_n, b_n, c_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) を,

$$(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0),$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad c_{n+1} = c_n + \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) A^3 を求めよ。
- (2) 点 P_2, P_3, P_4 の座標を求めよ。
- (3) 点 P_n の座標を求めよ。

第 4 (A) 問

さいころを投げると、1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 投げるとき、出る目の積の一の位が j ($j = 0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

- (1) $p_2(0)$, $p_2(1)$, $p_2(2)$ を求めよ。
- (2) $p_{n+1}(1)$ を, $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。
- (3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ。
- (4) $p_n(5)$ を求めよ。

第 4 (B) 問

x, y を正の整数とする。

- (1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) p を 3 以上の素数とする。 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち, $2x + 3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。