

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2004 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

- 第 4(A) 問と第 4(B) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし、8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し、8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば、7 の位置で 3 が出た場合、8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお、サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて、サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

第 2 問

a, b, c を実数とし、実数の組 (x, y, z) に関する方程式

$$(i) \begin{cases} x + y - 2z = 3a \\ 2x - y - z = 3b \\ x - 5y + 4z = 3c \end{cases} \quad \text{および} \quad (ii) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

を考える。

- (1) 方程式 (i) が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式 (i) の解 (x, y, z) を求めよ。
- (2) 方程式 (i) と (ii) がただ一つの共通解をもつとき、その共通解 (x, y, z) は方程式 $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ をみたすことを示せ。

第 3 問

多項式の列 $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ が, $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = x$,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

をみたすとする。

- (1) $f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$ であることを示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $|x| \leq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。
このとき, $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

第 4 (A) 問

C_1, C_2, C_3 は、半径がそれぞれ $a, a, 2a$ の円とする。いま、半径 1 の円 C にこれらが内接していて、 C_1, C_2, C_3 は互いに外接しているとき、 a の値を求めよ。

第 4 (B) 問

正の整数 a と b が互いに素であるとき、正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ ($n \geq 2$) で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。