

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（理系）

対象年度：2003 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

- 第 4(A) 問と第 4(B) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

2 次方程式 $x^2 - px - q = 0$ は実数解 α, β を持つものとする。座標平面上の点列 $\{P_n(a_n, b_n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$(a_0, b_0) = (0, 0), \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2 + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) P_2, P_3 の座標を α のみを用いて表せ。
- (2) P_n の座標を α のみを用いて表せ。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき, $P_n(a_n, b_n)$ がある点 $P(a, b)$ に収束するための必要十分条件を α に関する条件として与え, その点 $P(a, b)$ を求めよ。

第 2 問

O を原点とする座標平面上の、半径 1 の円周 $A : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $\ell : y = d$ ($0 < d < 1$) との交点を P, Q とする。円周 A 上の点 $R(x, y)$ は $y > d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S, 点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき、線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。

第 3 問

サイコロを n 回投げて、3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について、 $P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし、このような k が複数あるときは、最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1) $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 $\frac{N(n)}{n}$ を最小にする n と、そのときの $\frac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$ を求めよ。

第 4 (A) 問

- (1) 平行四辺形 ABCD において, $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $BD = c$, $AC = d$ とする。このとき, $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 3つの正数 a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$) が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき, 各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。

第 4 (B) 問

各点で微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき、 $y = f'(x)$ と $y = \int_0^x f(t) dt$ のグラフの概形を解答欄の所定の位置に描け。また、そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。

