

# 数 学

(理 科 系 学 部)

試 験 時 間 150 分

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子は，問題紙，答案紙，数学公式集からなる。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。



# 問 題 紙

- 1  $e$  を自然対数の底とする。 $e \leq p < q$  のとき、不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ。

- 2 閉区間  $[0, 2\pi]$  上で定義された  $x$  の関数  $f(x) = \int_0^\pi \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right) dt$  の最大値および最小値とそのときの  $x$  の値をそれぞれ求めよ。

- 3  $\triangle ABC$  の外心（外接円の中心） $O$  が三角形の内部にあるとし、 $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$  を満たす正数であるとする。また、直線  $OA, OB, OC$  がそれぞれ辺  $BC, CA, AB$  と交わる点を  $A', B', C'$  とする。
- (1)  $\overrightarrow{OA}, \alpha, \beta, \gamma$  を用いて  $\overrightarrow{OA'}$  を表せ。
  - (2)  $\triangle A'B'C'$  の外心が  $O$  に一致すれば  $\alpha = \beta = \gamma$  であることを示せ。

- 4 問題 4 は選択問題である。次の (A), (B) のいずれか一方を選択して解答せよ。どちらを選択したかを答案紙 4 の所定の欄に記入せよ。

(A)  $n$  は 3 以上の自然数とする。有限複素数列  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の各項はいずれも方程式  $z^6 = 1$  の解の一つであり、かつ、関係式  $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$  を満たしているとする。

- (1)  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の中に 1 が含まれ、 $-1$  が含まれていないとすれば、 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  と  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  はいずれも  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の中に含まれることを示せ。
- (2)  $n = 6$  のとき、(1) のような複素数列  $z_1, z_2, \dots, z_n$  のとり方の個数を求めよ。

(B) 数直線上の原点  $O$  から出発して、硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば  $+1$ 、裏が出れば  $-1$ 、それぞれ駒を進めるとする。ただし、点  $-1$  または点  $3$  に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

- (1)  $k$  回目に硬貨を投げたあと、駒が点  $1$  にある確率を求めよ。
- (2)  $k$  回目に硬貨を投げたあと、駒がある点  $X_k$  の期待値  $E[X_k]$  を求めよ。

1

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

数学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

1

(解答欄)

2

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

数学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

2

(解答欄)

3

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

数学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

3

(解答欄)

4

理科系

|         |  |  |  |  |
|---------|--|--|--|--|
| 受 験 番 号 |  |  |  |  |
|         |  |  |  |  |

数学

|  |
|--|
|  |
|--|

答 案 紙

|      |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|
| 受験番号 |  |  |  |  |  |
|------|--|--|--|--|--|

4

(解答欄)

# 数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって  
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \left(s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

(図 形 と 式)

$$6. \text{数直線上の2点 } x_1, x_2 \text{ を } m:n \text{ に内分する点, および外分する点: } \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

$$7. \text{点 } (x_1, y_1) \text{ と直線 } ax + by + c = 0 \text{ との距離, および点 } (x_1, y_1, z_1) \text{ と平面 } ax + by + cz + d = 0 \text{ との距離:}$$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8. \text{だ円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$9. \text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(ベ ク ト ル と 行 列)

$$10. \text{2つのベクトルのなす角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$11. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (ad-bc \neq 0)$$

(複 素 数)

12. 極形式表示:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $(r = |z|, \theta = \arg z)$

13.  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  に対し,  $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  に対し,  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15.  $x^2 + px + q = 0$  の解が  $\alpha, \beta$  のとき,  $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$

16.  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  の解が  $\alpha, \beta, \gamma$  のとき,  $\alpha + \beta + \gamma = -p, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17.  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

19.  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

20.  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

21.  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

22.  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

23.  $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ ,  $\left( \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

(数 列)

24. 初項  $a$ , 公差  $d$ , 項数  $n$  の等差数列の和:  $S_n = \frac{1}{2}n(a + \ell) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$ ,  $(\ell = a + (n-1)d)$

25. 初項  $a$ , 公比  $r$ , 項数  $n$  の等比数列の和:  $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ,  $(r \neq 1)$

26.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828 \dots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t) dt = \int f(x) dx$$

$$34. \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \quad (a > 0), \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0), \quad \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列・組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起こる確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \quad (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$



