

入学試験過去問題

数 学

名古屋大学（文系）

対象年度：2013年

試験時間：90分

問題数：3問

第 1 問

3人でジャンケンをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次回のジャンケンを行い（アイコの場合は誰も脱落しない）、勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でジャンケンを始め、ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n 、3人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き、 p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

第 2 問

平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり、 C_1 の周上に定点 A がある。点 P , Q はそれぞれ C_1 , C_2 の周上を反時計回りに動き、ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t = 0$ において、 P は A の位置にあって O , P , Q はこの順に同一直線上に並んでいる。 $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。

第 3 問

k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする。 ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が 7 以上の素数のとき, $S_1(p-1), S_2(p-1), S_3(p-1), S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。