

xy 平面上を次の規則 (i), (ii) に従って移動する点 A を考える。

(i) 時刻 0 で点 A は原点にある。

(ii) ある時刻 k において点 A が (x, y) にあるとき、時刻が 1 増えると点 A は 3 点 $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, $(x, y+1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

1 以上の整数 n に対して、次の条件 (*) が成り立つ確率を P_n とする。

(*) 時刻 0 から時刻 n まで点 A はつねに $-1 \leq y - x \leq 1$ で定まる領域にある。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) P_1, P_2, P_3 を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対して、条件 (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y - x = 0$ 上にある確率を a_n とする。また、条件 (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が直線 $y - x = 1$ 上または直線 $y - x = -1$ 上にある確率を b_n とする。 a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(3) P_{n+2} を P_{n+1}, P_n を用いて表せ。

(4) $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ とおくとき、

$$P_n \leq \alpha^{n-1}$$

が 1 以上のすべての整数 n に対して成り立つことを証明せよ。