

以下の問に答えよ。

- (1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする。さらに以下の極限值 a, b ($a < b$) が存在すると仮定する。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$$

このとき、 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し、関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ。

- (2) 実数 x を変数とする関数

$$f(x) = \log \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。また、この f に対し小問 (1) の極限值 a, b を求めよ。

- (3) 小問 (2) の関数 f および極限值 a, b を考える。 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し小問 (1) の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ。