

名古屋大学（理系） 2024 年 第 4 問

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p ($0 \leq p \leq 1$) とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき、赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1) $n \geq 2$ に対して、 $f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx$$

を示せ。

(3) 自然数 k に対して、定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$$

を求めよ。