

名古屋大学（理系） 2022 年 第 4 問

関数 $f(x)$ は区間 $x \geq 0$ において連続な増加関数で $f(0) = 1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geq 0$ における増加関数であるとは、区間内の任意の実数 x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下、 n は正の整数とする。

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx = \infty \text{ を示せ。}$$

$$(2) \quad \text{区間 } y > 2 \text{ において関数 } F_n(y) \text{ を } F_n(y) = \int_{2 + \frac{1}{n}}^y \frac{f(x)}{x - 2} dx \text{ と定めるとき,}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_n(y) = \infty \text{ を示せ。また } 2 + \frac{1}{n} \text{ より大きい実数 } a_n \text{ で}$$

$$\int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx + \int_{2 + \frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2 - x} dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

$$(3) \quad (2) \text{ の } a_n \text{ について, 不等式 } a_n < 4 \text{ がすべての } n \text{ に対して成り立つことを示せ。}$$