

正の整数 n に対して $1, 2, \dots, n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする。この $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し、各添字 $i = 1, 2, \dots, n$ について、 a_i の値が j であるとき、その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i = j \rightarrow a_j = k$ と書くことにする。ここで $a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow \dots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (2, 5, 6, 1, 4, 3, 7)$ のとき、

$$(i) \quad a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5 \rightarrow a_5 = 4 \rightarrow a_4 = 1 \rightarrow a_1 = 2$$

$$(ii) \quad a_3 = 6 \rightarrow a_6 = 3 \rightarrow a_3 = 6$$

$$(iii) \quad a_7 = 7 \rightarrow a_7 = 7$$

となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル、列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の (i), (ii), (iii) は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1) $n = 3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n = 4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\frac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。