

名古屋大学（理系） 2018 年 第 1 問

自然数 n に対し、定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$ を考える。このとき、次の問に答えよ。

(1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき (1), (2) を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。