

入学試験過去問題
数 学

九州大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。
- (2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

第 2 問

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

第 3 問

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{q} に対して、次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての \vec{q} に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル \vec{v}, \vec{w} で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし、 x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル \vec{q} に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

第 4 問

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
- (B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
- (C) $f(0) \neq 0$
- (D) $f(x), g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0, g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1, g(0) = 0$ がわかる。以上のことから、
② $f(x), g(x)$ はすべての x の値で微分可能で、 $f'(x) = -g(x), g'(x) = f(x)$ が成立することが示される。③上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ であることが、実部と虚部を調べることによりわかる。ただし、 i は虚数単位である。よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに、 a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

- (D)' $f(x), g(x)$ は $x=0$ で微分可能で、 $f'(0) = a, g'(0) = b$

におきかえて、条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x), g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも条件 (A), (B), (C) から $f(0) = 1, g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、④条件 (A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x), q(x)$ がまず求まり、このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる。

- (1) 下線部①について, $f(0) = 1, g(0) = 0$ となることを示せ。
- (2) 下線部②について, $f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり, $f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。
- (3) 下線部③について, 下線部①, 下線部②の事実を用いることにより, $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$ となることを示せ。
- (4) 下線部④について, 条件 (B), (D) において, $f(x)$ を $p(x)$ に, $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,
- (B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$
- (D) $p(x), q(x)$ は $x = 0$ で微分可能で $p'(0) = 0, q'(0) = 1$
- を満たすことを示せ。また空欄 , に入る関数を求めよ。

第 5 問

xy 平面上の曲線 C を, 媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2 \sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線 C のうち $y \leq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。