

入学試験過去問題  
数 学

九州大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：150分

問題数：5問

## 第 1 問

座標空間内の 5 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1), Q(4, 0, 5)$$

を考える。3 点  $O, A, B$  を通る平面を  $\alpha$  とし、 $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の両方に垂直であり、 $x$  成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル  $\vec{n}$  を求めよ。
- (2) 平面  $\alpha$  に関して点  $P$  と対称な点  $P'$  の座標を求めよ。
- (3) 点  $R$  が平面  $\alpha$  上を動くとき、 $|\vec{PR}| + |\vec{RQ}|$  が最小となるような点  $R$  の座標を求めよ。

## 第 2 問

$n$  を 3 以上の自然数,  $\alpha, \beta$  を相異なる実数とすると, 以下の問いに答えよ。

- (1) 次をみだす実数  $A, B, C$  と整式  $Q(x)$  が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

- (2) (1) の  $A, B, C$  を  $n, \alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (3) (2) の  $A$  について,  $n$  と  $\alpha$  を固定して,  $\beta$  を  $\alpha$  に近づけたときの極限  $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$  を求めよ。

### 第 3 問

自然数  $m, n$  が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\frac{n^2+1}{2}, \frac{n^2-1}{2}$  は互いに素な整数であることを示せ。
- (2)  $n^2 - 1$  は 168 の倍数であることを示せ。
- (3)  $\textcircled{1}$  をみたす自然数の組  $(m, n)$  を 1 つ求めよ。

## 第 4 問

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間  $a \leq x \leq b$  で連続な関数  $f(x)$  に対して、 $F'(x) = f(x)$  となる関数  $F(x)$  を一つ選び、 $f(x)$  の  $a$  から  $b$  までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots ①$$

で定義する。定積分の値は  $F(x)$  の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

(A)  $\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$

(B)  $a \leq c \leq b$  のとき、 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

(C) 区間  $a \leq x \leq b$  において  $g(x) \geq h(x)$  ならば、 $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$

ただし、 $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  は区間  $a \leq x \leq b$  で連続な関数、 $k$ ,  $l$  は定数である。

以下、 $f(x)$  を区間  $0 \leq x \leq 1$  で連続な増加関数とし、 $n$  を自然数とする。定積分の性質 ア を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$  とおくと、不等式 ② と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots\dots ③$$

よって、はさみうちの原理より  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$  が成り立つ。

- (1) 関数  $F(x)$ ,  $G(x)$  が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義 ① を用いて, 定積分の性質 (A) で  $k = l = 1$  とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて, 次を示せ。

$$a < b \text{ のとき, 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) > 0 \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx > 0$$

- (3) (A), (B), (C) のうち, 空欄  に入る記号として最もふさわしいものを1つ  
選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式 ② を  
示せ。
- (4) (A), (B), (C) のうち, 空欄  に入る記号として最もふさわしいものを1つ  
選び答えよ。また, 不等式 ③ を示せ。

## 第 5 問

$xy$  平面上の曲線  $C$  を、媒介変数  $t$  を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間  $0 < t < \frac{\pi}{6}$  において、 $\frac{dx}{dt} < 0$ ,  $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線  $C$  の  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$  の部分,  $x$  軸, 直線  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  は  $x$  軸に関して対称であることを示せ。また,  $C$  上の点を原点を中心として反時計回りに  $\frac{\pi}{3}$  だけ回転させた点は  $C$  上にあることを示せ。
- (4) 曲線  $C$  の概形を図示せよ。