入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

九州大学（理系）

対象年度： 2022 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

配点： 250 点

〔 1 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

座標空間内の 5 点

$$\mathrm{O}\,(0,\ 0,\ 0)\,,\ \mathrm{A}\,(1,\ 1,\ 0)\,,\ \mathrm{B}\,(2,\ 1,\ 2)\,,\ \mathrm{P}\,(4,\ 0,\ -1)\,,\ \mathrm{Q}\,(4,\ 0,\ 5)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

(3) 点 R が平面 α 上を動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

（下書き用紙）

〔 2 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

n を 3 以上の自然数，α，β を相異なる実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A，B，C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x-\alpha)(x-\beta)^2 Q(x) + A(x-\alpha)(x-\beta) + B(x-\alpha) + C$$

(2) (1) の A，B，C を n，α，β を用いて表せ。

(3) (2) の A について，n と α を固定して，β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \to \alpha} A$ を求めよ。

（下書き用紙）

〔 3 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

自然数 m，n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{n^2+1}{2}$，$\dfrac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) n^2-1 は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ① をみたす自然数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

（下書き用紙）

〔 4 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を1つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A)　$\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B)　$a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C)　区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とし，n を自然数とする。<u>定積分の性質 $\boxed{\quad ア \quad}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，</u>

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\quad イ \quad}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots\cdots ③$$

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことを，導関数の定義に従って示せ。また，この等式と定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と平均値の定理を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

〔 5 〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leqq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において，$\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。

(2) 曲線 C の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{6}$ の部分，x 軸，直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また，C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。

(4) 曲線 C の概形を図示せよ。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

（下書き用紙）

（下書き用紙）

（下書き用紙）

（下書き用紙）