入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

九州大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

第　1　問

座標空間内の 4 点 O (0, 0, 0)，A (1, 0, 0)，B (0, 1, 0)，C (0, 0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2)　中心の x 座標，y 座標，z 座標がすべて正の実数であり，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき，その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

第 2 問

θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

第　3　問

座標平面上の点 $(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

条件：　すべての実数 t に対して $y \leqq e^t - xt$ が成立する。　　$\cdots\cdots(*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を使ってよい。

(1)　条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2)　条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ のうち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

第 4 問

自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\ (a_n \neq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$$

を考える。α，β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α，β を結ぶ線分上にある点 γ で，

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき，

α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $n = 2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha = 1 - i$，$\beta = 1 + i$，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための，実数 a，b，c に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

第　5　問

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2)　p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。