

# 入学試験過去問題

## 数 学

九州大学（理系）

対象年度：2019 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

## 第 1 問

$n$  を自然数とする。 $x, y$  がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を  $I_n$  とおく。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ。

## 第 2 問

0 でない 2 つの整式  $f(x)$ ,  $g(x)$  が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7$$

$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の次数と  $g(x)$  の次数はともに 2 以下であることを示せ。
- (2)  $f(x)$  と  $g(x)$  を求めよ。

### 第 3 問

1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に  $a, b, c$  とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解  $z_1, z_2$  を表す複素数平面上の点をそれぞれ  $P_1(z_1), P_2(z_2)$  とする。また、複素数平面上の原点を  $O$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $P_1$  と  $P_2$  が一致する確率を求めよ。
- (2)  $P_1$  と  $P_2$  がともに単位円の周上にある確率を求めよ。
- (3)  $P_1$  と  $O$  を通る直線を  $\ell_1$  とし、 $P_2$  と  $O$  を通る直線を  $\ell_2$  とする。 $\ell_1$  と  $\ell_2$  のなす鋭角が  $60^\circ$  である確率を求めよ。

## 第 4 問

座標平面上の 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$ ,  $B(1, \sqrt{3})$  を考える。点  $P_1$  は線分  $AB$  上にあり、 $A$ ,  $B$  とは異なる点とする。

線分  $AB$  上の点  $P_2, P_3, \dots$  を以下のように順に定める。点  $P_n$  が定まったとき、点  $P_n$  から線分  $OB$  に下ろした垂線と  $OB$  との交点を  $Q_n$  とし、点  $Q_n$  から線分  $OA$  に下ろした垂線と  $OA$  との交点を  $R_n$  とし、点  $R_n$  から線分  $AB$  に下ろした垂線と  $AB$  との交点を  $P_{n+1}$  とする。

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $P_n$  が限りなく近づく点の座標を求めよ。

## 第 5 問

$a, b$  を複素数,  $c$  を純虚数でない複素数とし,  $i$  を虚数単位とする。複素数平面において, 点  $z$  が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点  $w$  の軌跡を  $C$  とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア)  $z = i$  のときに  $w = i$  となり,  $z = -i$  のときに  $w = -i$  となる。

(イ)  $C$  は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点  $-1$  は  $C$  に属さない。

このとき  $a, b, c$  の値を求めよ。さらに  $C$  を求め, 複素数平面上に図示せよ。