

2017 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は，裏面の記入例にならって，マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

定数 $a > 0$ に対し、曲線 $y = a \tan x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_1 、曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) a が (1) の条件を満たすとき、原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし、 P の x 座標を p とする。 P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき、 a および $\cos 2p$ の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値のとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

2つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し、座標空間内の4点を

$$A(a, 0, 0), \quad B(0, b, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad D(a, b, 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) さらに、点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。 $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ がなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を a, b を用いて表せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

初項 $a_1 = 1$ ，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち， 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。
- (3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

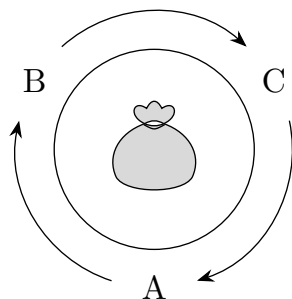
〔問題〕

赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a), (b), (c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

- (a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。
- (b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。
- (c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n ($n = 1, 2, \dots$) とする。ただし， $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
- (2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき， d_n を求めよ。
- (3) 自然数 $n \geq 3$ に対し， a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。



(下書き用紙)

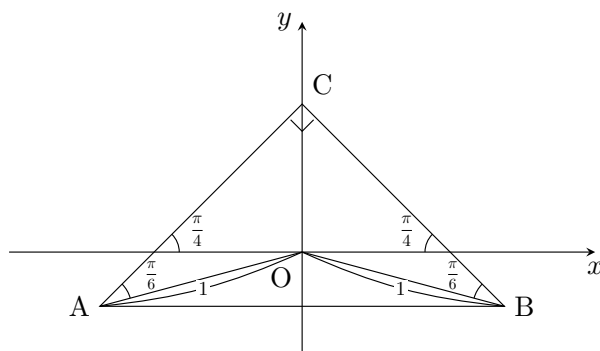
〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙〔5〕の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

2つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ を用いて、複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) により定める。ただし、 i は虚数単位を表す。2と3の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。
- (2) $|z_n| \leq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。
- (3) 下図のように、複素数平面上の $\triangle ABC$ は線分 AB を斜辺とし、点 $C\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A, B を表す複素数の虚部は負であり、原点 O と2点 A, B の距離はともに1である。点 P_n が $\triangle ABC$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



(下書き用紙)

(下書き用紙)

