

2016 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は，裏面の記入例にならって，マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面上の曲線 C_1 , C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$

$$C_2 : y = (x - 1)(x - a)$$

とする。ただし、 a は実数である。 n を自然数とすると、曲線 C_1 , C_2 が 2 点 P , Q で交わり、 P , Q の x 座標はそれぞれ 1 , $n + 1$ となっている。また、曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n , 曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を n の式で表し、 $a > 1$ を示せ。
- (2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また、AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = \ell CD$ を満たす実数 k , ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面上で円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1, 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

（規則）

- (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば、コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。
- (ii) 6 の目が出た場合は、 x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば、コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (3) n を自然数とする。 n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

自然数 n に対して、 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。 a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) $a_1, a_2, \dots, a_6$ を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。
 - (ii) N を十進法で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
 - (iii) N は 13 で割り切れる。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

以下の問いに答えよ。

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数、 i を虚数単位とし、 z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき、整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

(下書き用紙)

(下書き用紙)

