

入学試験過去問題

数 学

九州大学（理系）

対象年度：2014 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

関数 $f(x) = x - \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\frac{1}{2}$ となるものを ℓ とする。

- (1) ℓ の方程式と接点の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) a は (1) で求めたものとする。曲線 $y = f(x)$, 直線 $x = a$, および x 軸で囲まれた領域を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の自然数 a に対し, a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。
- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

第 3 問

座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円①と直線 $y = x + a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。
- (2) $|x| + |y| = 1$ を満たす点 (x, y) 全体がなす図形の概形をかけ。
- (3) 点 (x, y) が楕円①上を動くとき、 $|x| + |y|$ の最大値, 最小値とそれを与える (x, y) をそれぞれ求めよ。

第 4 問

A さんは 5 円硬貨を 3 枚, B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお, 表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし, 硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて, 以下の問いに答えよ。

- (1) A さんが B さんに勝つ確率 p , および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。
- (2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

第 5 問

2 以上の自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。 $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $f_n(x)$ が区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。