

入学試験過去問題

数 学

九州大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

$a > 1$ とし, 2 つの曲線

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

$$y = \frac{a^3}{x} \quad (x > 0)$$

を順に C_1 , C_2 とする。また, C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。
- (2) 点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}\right)$ 。このとき, $\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$ を求めよ。

第 2 問

一辺の長さが 1 の正方形 $OABC$ を底面とし、点 P を頂点とする四角錐 $POABC$ がある。ただし、点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}$ ，および $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし、辺 CP の中点を N とする。さらに、点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は、平面 OMN に垂直であるとする。このとき、長さの比 $BQ:QC$ ，および線分 OP の長さを求めよ。

第 3 問

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

第 4 問

原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。円 S の短い方の弧 $\widehat{AB}$ 、円 T の短い方の弧 $\widehat{BC}$ 、および線分 AC で囲まれた図形を ℓ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

第 5 問

実数 x, y, t に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。 $(AB)^2$ が対角行列, すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「 $3x - 3y - 2t \neq 0 \implies A = tB$ 」を証明せよ。

以下 (2), (3), (4) では, さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし, E は単位行列を表す。

(2) $3x - 3y - 2t = 0$ を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x, y, t が整数のとき, 行列 A を求めよ。