

2013 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$a > 1$ とし、2つの曲線

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

$$y = \frac{a^3}{x} \quad (x > 0)$$

を順に C_1 , C_2 とする。また、 C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする。
以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。
- (2) 点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}\right)$ 。
このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし、点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし、点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}$ ，および $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を 2 : 1 に内分する点を M とし、辺 CP の中点を N とする。さらに、点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は、平面 OMN に垂直であるとする。このとき、長さの比 BQ : QC，および線分 OP の長さを求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。円 S の短い方の弧 $\widehat{AB}$ ，円 T の短い方の弧 $\widehat{BC}$ ，および線分 AC で囲まれた図形を ℓ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙〔5〕の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

実数 x, y, t に対して、行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。 $(AB)^2$ が対角行列、すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「 $3x - 3y - 2t \neq 0 \implies A = tB$ 」を証明せよ。

以下 (2), (3), (4) では、さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし、 E は単位行列を表す。

(2) $3x - 3y - 2t = 0$ を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x, y, t が整数のとき、行列 A を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

