

2012 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

2 次の正方行列 A, B はそれぞれ

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

をみたすものとする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 E は 2 次の単位行列を表すものとする。

- (1) 行列 A, B, A^2, B^2 を求めよ。
- (2) $(AB)^3 = E$ であることを示せ。
- (3) 行列 A から始めて、 B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A, \quad AB, \quad ABA, \quad ABAB, \quad \dots\dots,$$

および行列 B から始めて、 A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B, \quad BA, \quad BAB, \quad BABA, \quad \dots\dots$$

を考える。これらの行列の中で、相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

実数 a と自然数 n に対して、 x の方程式

$$a(x^2 + |x + 1| + n - 1) = \sqrt{n}(x + 1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を、 n を用いて表せ。
- (2) この方程式が、すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が実数解 α, β を持ち、条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) \neq 0$ をみたしているとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。
- (2) $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は整数であることを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ となるとき、 p と q の値をすべて求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき、次の試行 T を考える。

（試行 T ）箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ、その後、箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個、箱 B に白玉が 2 個入っているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

