

# 入学試験過去問題

## 数 学

九州大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

## 第 1 問

曲線  $y = \sqrt{x}$  上の点  $P(t, \sqrt{t})$  から直線  $y = x$  へ垂線を引き、交点を  $H$  とする。ただし、 $t > 1$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $H$  の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $x \geq 1$  の範囲において、曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = x$  および線分  $PH$  とで囲まれた図形の面積を  $S_1$  とするとき、 $S_1$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。 $S_1 = S_2$  であるとき、 $t$  の値を求めよ。

## 第 2 問

$a$  を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$  の極大値および極小値を求めよ。
- (2)  $x \geq 3$  のとき、不等式  $x^3e^{-x} \leq 27e^{-3}$  が成り立つことを示せ。さらに、極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x}$  を求めよ。
- (3)  $k$  を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$  のグラフと  $y = ke^x + a^2$  のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 $a$  と  $k$  を用いて表せ。

### 第 3 問

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  とするとき、一般項  $a_n$  を求めよ。

(2)  $\tan \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ。

(3)  $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$  とするとき、

$$a_{n+k} = a_n \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

をみたす最小の自然数  $k$  を求めよ。

## 第 4 問

空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 2, 3)$ ,  $B(1, 0, 3)$ ,  $C(1, 2, 0)$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を通る球面の中心  $D$  の座標を求めよ。
- (2) 3 点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を通る平面に点  $D$  から垂線を引き、交点を  $F$  とする。線分  $DF$  の長さを求めよ。
- (3) 四面体  $ABCD$  の体積を求めよ。

## 第 5 問

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が  $i$  と  $j$  ならば、 $i$  のカードと  $j$  のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を  $n$  回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3)  $n = 2$  のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4)  $n = 3$  のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。