

2011 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は，裏面の記入例にならって，マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $P(t, \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。
ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。
- (2) $x \geq 3$ のとき、不等式 $x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに、極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ。
- (3) k を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 a と k を用いて表せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

をみたしているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とするとき、

$$a_{n+k} = a_n \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点 O , A , B , C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。
- (2) 3 点 A , B , C を通る平面に点 D から垂線を引き、交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を n 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) $n = 3$ のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

