

入学試験過去問題

数 学

九州大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 $t \geq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

- (1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき, t を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき, $\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。

第 2 問

次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし、出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ、もう 1 回サイコロを振って、2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし、合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって、2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

- (1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると、得点の期待値はいくらか。
- (2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると、得点の期待値はいくらか。
- (3) 得点の期待値を最大にするためには、競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

第 3 問

xy 平面上に曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ を描き, この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 , 第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。 C_1 上の点 $P_1 \left(a, \frac{1}{a^2} \right)$ から C_2 に向けて接線を引き, C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き, C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き, 接点を Q_2 とする。以下同様に続けて, C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q_1 の座標を求めよ。
- (2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。
- (3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の面積 S_n を求めよ。
- (4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

第 4 問

中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

第 5 問

実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $P(x, y)$ に対し、点 $Q(X, Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき、行列 A を求めよ。
- (2) P が放物線 $y = x^2$ の全体の上を動くとき、 Q は常に円 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき、行列 A を求めよ。
- (3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q がある直線 L 全体の上を動くための a, b, c, d についての条件を求めよ。また、その条件が成り立っているとき、直線 L の方程式を求めよ。