

2010 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は，裏面の記入例にならって，マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 $t \geq 0$ を与えたとき、 A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

- (1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき、 t を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき、 $\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし、出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ、もう 1 回サイコロを振って、2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし、合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって、2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

- (1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると、得点の期待値はいくらか。
- (2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると、得点の期待値はいくらか。
- (3) 得点の期待値を最大にするためには、競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

xy 平面上に曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ を描き、この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 、第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。 C_1 上の点 $P_1 \left(a, \frac{1}{a^2} \right)$ から C_2 に向けて接線を引き、 C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き、 C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き、接点を Q_2 とする。以下同様に続けて、 C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q_1 の座標を求めよ。
- (2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。
- (3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の面積 S_n を求めよ。
- (4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。
曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $P(x, y)$ に対し、点 $Q(X, Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき、行列 A を求めよ。
- (2) P が放物線 $y = x^2$ の全体の上を動くとき、 Q は常に円 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき、行列 A を求めよ。
- (3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき、 Q がある直線 L 全体の上を動くための a, b, c, d についての条件を求めよ。また、その条件が成り立っているとき、直線 L の方程式を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

