

2009 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面に 3 点 $O(0, 0)$, $A(2, 6)$, $B(3, 4)$ をとり、点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また、実数 s と t に対し、点 P を $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 C の座標を求め、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ を s と t を用いて表せ。
- (2) s を定数として、 t を $t \geq 0$ の範囲で動かすとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚, 「2」と書かれたカードが 2 枚, $\dots$, 「 k 」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M , 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M + N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し, そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) p_1 と p_2 を M, N で表せ。
- (2) p_{n+1} を p_n, M, N で表せ。
- (3) $\frac{M - N}{M + N}$ を k で表せ。
- (4) p_n を n と k で表せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

曲線 $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$ の点 $P \left(a, \frac{a^2}{2} \right)$ における法線と点 $Q \left(b, \frac{b^2}{2} \right)$ における法線の交点を R とする。ただし、 $b \neq a$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) b が a に限りなく近づくとき、 R はある点 A に限りなく近づく。 A の座標を a で表せ。
- (2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき、(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き、 C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

2 次の列ベクトル X, Y, Z は大きさが 1 であり, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし, 一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される。また, 2 次の正方行列 A が $AX = Y, AY = Z, AZ = X$ をみたすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $Y \neq -X$ を示せ。
- (2) Z は $Z = sX + tY$ (s, t は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ。
- (3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。
- (4) 行列 A を求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し、 P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\frac{dx}{dt} > 0$ であるとして、次の問いに答えよ。

- (1) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。
- (2) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき、 $|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

