

入学試験過去問題

数 学

九州大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\}$ を求めよ。

第 2 問

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。 k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り、そのカードの番号が k より大きいなら、抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら、そのカードを戻さずに、残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り、2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して、得点が n である確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。

第 3 問

$\triangle OAB$ において、辺 AB 上に点 Q をとり、直線 OQ 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle OAP$, $\triangle OBP$, $\triangle ABP$ の面積をそれぞれ a , b , c とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および a , b を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および a , b , c を用いて表せ。
- (3) 3 辺 OA , OB , AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし、3 直線 OA , OB , AB に接する円が存在するとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

第 4 問

$a > 0$ に対して, $f(x) = a + \log x (x > 0)$, $g(x) = \sqrt{x-1} (x \geq 1)$ とおく。2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が, ある点 P を共有し, その点で共通の接線 ℓ を持つとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a の値, 点 P の座標, および接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。
- (3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

第 5 問

いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円 Q に外接し、かつ、互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし、円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、 $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。