

2007 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geq 0$ を満たす数とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$ 、接線 $y = g(x)$ 、および 2 直線 $x = 0$ 、 $x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき、 $p \geq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

p を $0 < p < 1$ を満たす数とし、行列 A, B, C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに、行列 $A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を $A_1 = A, A_{n+1} = A_n B - B A_n + C (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) A_2, A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \Delta_n = a_n d_n - b_n c_n$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

a, b を正の数とし、空間内の 3 点 $A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$, $C(a, a, -b)$ を考える。 A, B, C を通る平面を α , 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点を D とするとき、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。また $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{DC}$ と $\overrightarrow{DO}$ のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ。また、平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき、線分 OH の長さを求めよ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。ただし、 P は平面 α 上にはないものとする。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式

$$(*) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える。ただし、さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解を持つとき、積 ac の取りうる値を求め、積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ。
- (2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし、一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して、つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい、 p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば、関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき、関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。
- (2) 自然数 m, n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく。 p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ。また、このとき mp は π の整数倍であり、 np は 2π の整数倍であることを示せ。
- (3) m, n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

