

2006 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること、また、 e は自然対数の底で、 $e < 3$ であることを用いてよい。

- (1) 自然数 n に対して、方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。
- (2) (1) の実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき、 $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$ 、 $ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$\triangle OAB$ において、辺 OB の中点を M 、辺 AB を $\alpha : 1 - \alpha$ に内分する点を P とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし、 Q を通り、線分 AM に垂直な直線が、辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ および α を用いて表せ。
- (2) $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\angle AOB = \theta$ で $\cos \theta = \frac{1}{6}$ とする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。
- (3) (2) の条件のもとで、点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n$$

$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする。

- (1) $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

関数 $f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$ を考える。ただし、 $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、 $F(a) = \int_0^a f(x)f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) $F(a)$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは、 $a \leq x \leq b$ ならば、 $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1 - x)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 区間 $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。
- (2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき、区間 $[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

