

入学試験過去問題

数 学

九州大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

直線 $\ell: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2 \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) に接しているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq 0$ とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geq 0$ の範囲にある部分を、 x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

第 2 問

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし、列ベクトル $\vec{p}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を $\vec{p}_1 = \vec{a}$, $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。
- (2) $\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。 $\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, \dots$ に対して A^n を求めよ。
- (4) $\vec{p}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。

第 3 問

t を実数とすると、2 次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と、そのときの虚数解をすべて求めよ。
- (2) (1) の虚数解のうち、その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め、図示せよ。
- (3) 複素数平面上で、点 z が (2) の図形 C 上を動くとき、

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め、図示せよ。

第 4 問

実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば, $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $[2] = 2$ である。このとき, $0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし, 必要なら $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

- (1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right] \geq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

第 5 問

実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき、 xy 平面上で点 $P(t^2, e^{-t})$ が描く曲線を C とする。 a を正の実数とし、曲線 C と x 軸、 y 軸、および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 面積 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、 $\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。
- (3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし、必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。