

2005 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

直線 $\ell: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2 \sin x \ (-\pi \leq x \leq \pi)$ に接しているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq 0$ とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geq 0$ の範囲にある部分を、 x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし、列ベクトル $\vec{p}_n (n = 1, 2, \dots)$ を $\vec{p}_1 = \vec{a}$, $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b} (n = 1, 2, \dots)$ で定める。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。
- (2) $\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p} (n = 1, 2, \dots)$ とおく。 $\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, \dots$ に対して A^n を求めよ。
- (4) $\vec{p}_n (n = 1, 2, \dots)$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

t を実数とすると、2 次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と、そのときの虚数解をすべて求めよ。
- (2) (1) の虚数解のうち、その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め、図示せよ。
- (3) 複素数平面上で、点 z が (2) の図形 C 上を動くとき、

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め、図示せよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

実数 x に対して、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば、 $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $[2] = 2$ である。このとき、 $0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし、必要なら $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

- (1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right] \geq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき、 xy 平面上で点 $P(t^2, e^{-t})$ が描く曲線を C とする。 a を正の実数とし、曲線 C と x 軸、 y 軸、および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 面積 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、 $\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。
- (3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし、必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

