

2004 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし、 $0! = 1$ とする。

- (1) I_0 の値を求め、 $n = 1, 2, \dots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また、これらを用いて I_3 の値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ に対して $e^x \leq e^2$ であることを利用して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。ただし、 a, b は定数とする。

- (1) $(a + b)^4, (a - b)^4$ を展開せよ。
- (2) A^4 を $(a + b)^4, (a - b)^4$ を用いて表せ。
- (3) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。
- (4) $0 < a < 1$ とし $b = 1 - a$ としたときの A^n の $(1, 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面上を動く点 $P(x(t), y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で与えられているとし、この点の軌跡を C とする。

- (1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。
- (2) C が x 軸, y 軸に関して対称であることを示せ。
- (3) C の概形を描け。
- (4) C が囲む図形の面積を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標空間内の三角柱 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq y, 0 \leq z \leq 1$ を考え、その xy 平面内の面を S , xz 平面内の面を T とする。点 $A(a, b, 0)$ を S 内に、点 $B(c, 0, d)$ を T 内にとり、また $C(1, 1, 1)$ とする。ただし、点 A, B は原点 O とは異なるとする。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{OC}$ に直交する単位ベクトルを求め、その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{OB}$ の内積の絶対値を求めよ。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。ただし、点 O, A, B, C は同一平面上にならないとする。
- (3) 点 A が S 内を、点 B が T 内を動くとする。このときの、四面体 $OABC$ の体積の最大値、および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。

(下書き用紙)

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 5 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと、左から電球の色を見ていき、色の変化の回数を調べる。

- (1) 赤青…青，赤赤青…青，……のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。
- (2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。
- (3) 色の変化がちょうど m 回 ($0 \leq m \leq n - 1$) 起きる確率を求めよ。
- (4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

