

2001 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

試 験 時 間 150 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、250 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (理系)

〔 1 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 (p, q) に関する、点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線

$$mx + ny = 0$$

に関する、点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。ただし m, n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で、中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で、 xy 平面による切り口は一辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で、その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。 $0 < r \leq \sqrt{2}$ とし、円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

- (1) 高さが $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。
- (2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。
- (3) $0 < r \leq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問〔A〕, 〔B〕, 〔C〕から 1 問を選択し, 解答紙〔4〕に選択した問題符号 A, B, C のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔A〕

複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

- (2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = \bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

〔B〕

サイコロを n 回振って, 出た目を小さい方から順に並べ, 第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする。

- (1) $n = 7$ のとき, 3 の目が 3 回, 5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して, $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して, X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ。ここで, $\log$ は自然対数を表す。
- (5) 一般の n に対して, 期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

〔C〕

m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (a) $i = m, j = n, k = 0$ 。
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する。

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする。

(d) $i = \lfloor i/2 \rfloor$ 。

(e) $j = 2 * j$ 。

(f) (b) にもどる。

(ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき、3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して、(b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して、Ans を求めよ。

(4) ℓ を自然数とする。 $m = 3 \cdot 2^\ell$ のとき、終了するまでに何回 (d) を実行するか。

〔 5 〕 (配点 50 点)

次の問 D, E, F から 1 問を選択し, 解答紙 5 に選択した問題符号 D, E, F のいずれかを記入してから解答しなさい。

D

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし, 関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし $\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正, 負, 0 に従って正, 負, 0 の値をとるものとする。また, 点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $Q(\alpha(t), \beta(t))$ を G の下側にとる。

- (1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。
- (2) $\alpha(t), \beta(t)$ を求めよ。
- (3) t が a から b ($a < b$) まで変化するとき, 点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1, L_2 とする。 $L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

E

- (1) e を自然対数の底とし,

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

とおく。 $0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ を示せ。必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

- (2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leq x \leq 1$ を n 個の小区間に等分して, 各小区間を底辺, 小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$n^k \left| \int_0^1 g(x) dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限值を求めよ。

F

p, q を整数とし, x, y を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$$

を考える。

- (1) この方程式を行列を用いて表し、係数行列の逆行列を求めよ。
- (2) 上の連立方程式の解 x, y が共に整数であるような組 (p, q) をすべて求めよ。
ただし $0 \leq p \leq 5, 0 \leq q \leq 5$ とする。
- (3) 正の整数 d で、「 d のどんな倍数 p, q に対しても上の連立方程式の解 x, y が整数になる」ものが存在することを示せ。
- (4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。

(下書き用紙)

