入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

九州大学（文系）

対象年度： 2023 年

試験時間： 120 分

問題数： 4 問

第 1 問

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。

$$C:\ y = |(x-3)(x+3)|, \qquad \ell:\ y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

第　2　問

xy 平面上の曲線 C : $y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(t,\ t^3 - t\right)$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と直線 $y = -x$ の交点を B，三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を t を用いて表せ。

(2)　$\theta = \angle\mathrm{OBA}$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。

(3)　$f(t) = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}$ とする。$t > 0$ のとき，$f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。

第　3　問

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a,\ c),\quad \vec{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ。
以下，$D \fallingdotseq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1,\quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。

第 4 問

ω を $x^3 = 1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて，次の規則で 4 つの複素数 0，1，ω，ω^2 を並べていくことにより，複素数の列 z_1，z_2，z_3，$\cdots\cdots$ を定める。

- $z_1 = 0$ とする。
- z_k まで定まったとき，さいころを投げて，出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
  - $z_k = 0$ のとき，$z_{k+1} = \omega^t$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t = 1$，2 のとき，$z_{k+1} = 0$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t = 3$ のとき，$z_{k+1} = \omega z_k$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t = 4$ のとき，$z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t = 5$ のとき，$z_{k+1} = z_k$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t = 6$ のとき，$z_{k+1} = \overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2 = \overline{\omega}$ となることを示せ。

(2) $z_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。

(3) $z_3 = 1$，$z_3 = \omega$，$z_3 = \omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。

(4) $z_n = 1$ となる確率を n の式で表せ。