入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

九州大学（文系）

対象年度： 2022 年

試験時間： 120 分

問題数： 4 問

第　1　問

a を $-3 < a < 13$ をみたす実数とし，次の曲線 C と直線 ℓ が接しているとする。

$$C:\ y = |\,x^2 + (3-a)x - 3a\,|, \quad \ell:\ y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの図形のうち，点 $(a,\ 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ。

第　2　問

座標空間内の 4 点

$$\mathrm{O}\,(0,\ 0,\ 0)\,,\ \mathrm{A}\,(1,\ 1,\ 0)\,,\ \mathrm{B}\,(2,\ 1,\ 2)\,,\ \mathrm{P}\,(4,\ 0,\ -1)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めよ。

(2)　点 P から平面 α に垂線を下ろし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。

(3)　平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

第　3　問

k を実数とし，整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

第 4 問

定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

$f(x)$ を整式とする。$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \cdots\cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は整式，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad \cdots\cdots ③$$

よって，n を限りなく大きくすると，S_n は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ に限りなく近づく。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義 ① を用いて，性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と，関数の増減と導関数の関係を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。