

入学試験過去問題

数 学

九州大学（文系）

対象年度：2013年

試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

一辺の長さが 1 の正方形 $OABC$ を底面とし、 $OP = AP = BP = CP$ をみたす点 P を頂点とする四角錐 $POABC$ がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D 、辺 CP の中点を E 、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ。
- (3) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。
- (4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき、 t の値および線分 OP の長さを求めよ。

第 2 問

座標平面上で、次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x + 2y \leq 5, \quad 3x + y \leq 8, \quad -2x - y \leq 4, \quad -x - 4y \leq 7$$

点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $x + y$ の値が最大となる点を Q とし、最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。
- (2) $a > 0$ かつ $b > 0$ とする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり、点 R でのみ最小値をとるとする。このとき、 $\frac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。

第 3 問

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

第 4 問

座標平面上の円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = x - 2$ は円 C に接することを示せ。また、接点の座標も求めよ。
- (2) 円 C と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $y \geq \frac{1}{4}x^2 - 1$ の表す領域を D とする。また、不等式 $|x| + |y| \leq 2$ の表す領域を A とし、不等式 $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ の表す領域を B とする。そして、和集合 $A \cup B$ 、すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき、領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し、さらに、その面積を求めよ。