

2008 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (文系)

試 験 時 間 120 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、4 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、200 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (文系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

自然数 n に対して、 $a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1}) \cdots (\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし、角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{\sin 4}{4 \sin 1}$ を示せ。
- (2) $a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1}$ を示せ。
- (3) $a_n < \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは、点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 (p, p^2) における C の法線の方程式を求めよ。
- (2) y 軸上の点 $(0, a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

(下書き用紙)

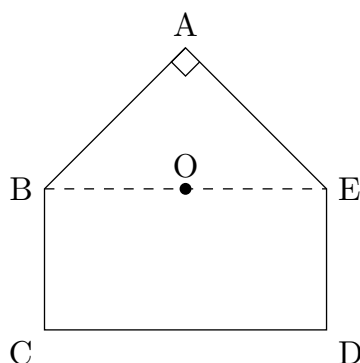
〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 3 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

図のような五角形 ABCDE (角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形) において、辺 BC と辺 DE の長さは 1, 辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点を O とする。また、5 枚のカードがあり、それぞれに A, B, C, D, E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き、もとに戻す。この操作を n 回繰り返し、 i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば、 i 回目に B を引いたとすると、 $P_i = B$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。
- (3) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OP_i}$ の内積を q_i とする。このとき、 $q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。



(下書き用紙)

〔 4 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 4 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

放物線 $C: y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ をみたす実数 a_1 を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $(a_1, a_1^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき、 a_2 を a_1 を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた a_2 に対して、 C 上の点 $(a_2, a_2^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ とする。このとき、すべての n に対して、 $a_n > 1$ を示せ。
- (3) $b_n = \frac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき、すべての n に対して、 $b_{n+1} < b_n^2$ を示せ。
- (4) $a_1 = 2$ のとき、 $b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ。ただし、必要があれば、 $\log_{10} 2$ を 0.301 として計算してよい。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

