

2003 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (文系)

試 験 時 間 120 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、4 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、200 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (文系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 a, c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について、次の条件を考える。

(*) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) \geq (x+1)^2$ が成立する。

- (1) $a \geq 2$ のとき、条件 (*) を満たす最小の c の値は $\frac{a}{a-1}$ であることを示せ。
- (2) $a \leq 2$ のとき、条件 (*) を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ が条件 (*) を満たしているとき、定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を最小にする a, c と、そのときの定積分の値を求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面上で、不等式 $2|x - 4| + |y - 5| \leq 3$, $2||x| - 4| + ||y| - 5| \leq 3$ が表す領域を、それぞれ A , B とする。

- (1) 領域 A を図示せよ。
- (2) 領域 B を図示せよ。
- (3) 領域 B の点 (x, y) で、 x が正の整数であり y が整数であって、 $\log_x |y|$ が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 (配点 50 点)

次の問〔A〕, 〔B〕, 〔C〕から 1 問を選択し, 解答紙〔3〕に選択した問題符号 A, B, C のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔A〕

a, b, c を実数とし, $a > 0$ とする。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。実数 p に対し, x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

- (1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき, $f(x)$ を求めよ。
- (2) 実数 x に対し, p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。 $h(x)$ を求めよ。
- (3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t, f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は

$$g(p) = pt - f(t) \quad \text{かつ} \quad q = -g(p)$$

であることを示せ。

〔B〕

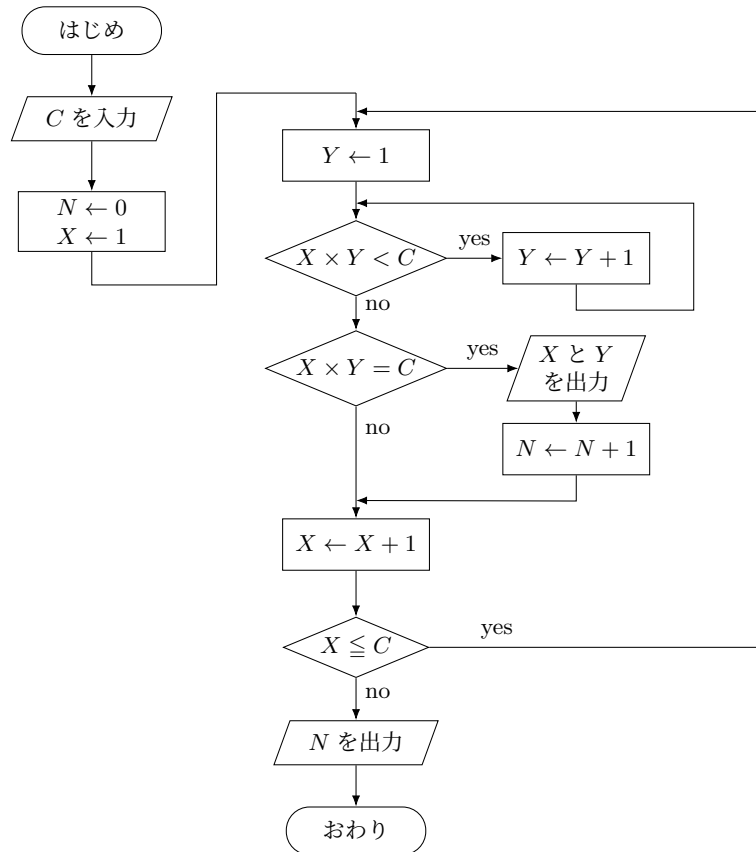
$\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし, C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し, 点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を ℓ_k とし, この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする。ただし, C と ℓ_k が接する場合は $P_{k+1} = P_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

- (1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1, m_1, r, k で表せ。
- (3) $a_1 = \frac{m_1}{1+r}$ とする。このとき, ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって, すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し, b を r で表せ。ただし, $m_1 \neq 0, r \neq -1, 0$ とする。

〔C〕

- (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。 $C = 105$ を入力したとき, X, Y および N の値を出力順にすべて示せ。
- (2) 座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A, B, R を入力したとき, 第 1 象限 (x 軸, y 軸は含まない) にあり, か

つ中心が (A, B) で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と、それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点（複数個あるときは x 座標が最大のもの）の座標を出力するプログラムの流れ図を、方針を記述してから作成せよ。



〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問〔D〕, 〔E〕, 〔F〕から1問を選択し, 解答紙〔4〕に選択した問題符号 D, E, F のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔D〕

空間内に四面体 OABC があり $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ はすべて 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを, それぞれ a , b , c とし, 三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) $\angle OGA$, $\angle OGB$, $\angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a , b , c の関係式で表せ。
- (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

〔E〕

$0 < a < 1$ である定数 a に対し, 複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし, i は虚数単位である。

- (1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき, z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。
- (2) 直線 ℓ を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。 m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ。

〔F〕

座標平面上に $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて, $y \leq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし, $0 < a \leq 2$ とする。

- (1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。
- (2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$, 2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として, ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。
- (3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり, 当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

