

入学試験過去問題

数 学

九州大学（文系）

対象年度：2001 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

- 第 3(A) 問と第 3(B) 問と第 3(C) 問から 1 問を選択して解答
- 第 4(D) 問と第 4(E) 問と第 4(F) 問から 1 問を選択して解答

第 1 問

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

第 2 問

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

第 3 (A) 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。 $a_1, \dots, a_n$ の積を P_n とおく。

- (1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。
- (2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。
- (3) $S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$ とおく。 S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。
- (4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

第 3 (B) 問

- (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。
- (2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。
- (3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば、 $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。
ただし、有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。
- (4) n が自然数のとき、 $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

第 3 (C) 問

r を 1 より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 ℓ 上の点で A からの距離が $1 - r$, 1 , $1 + r$ となるものをそれぞれ B , C , D とする。 BD を直径とする円を描き, A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。 m 上の点で A からの距離が $1 - r$, 1 , $1 + r$ となるものをそれぞれ E , F , G とする。 E , F を通り ℓ に接する円を描きその接点を P とする。また F , G を通り ℓ に接する円を描きその接点を Q とする。

- (1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。
- (2) CF を r で表せ。
- (3) $PQ = CF$ を示せ。

第 4 (D) 問

複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

- (2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\bar{z} + 1) = \overline{dz}(z + 1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

第 4 (E) 問

サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする。

- (1) $n = 7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して、 $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

第 4 (F) 問

m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (a) $i = m, j = n, k = 0$ 。
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する。
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする。
- (d) $i = \lfloor i/2 \rfloor$ 。
- (e) $j = 2 * j$ 。
- (f) (b) にもどる。

(ここで, $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。)

- (1) $m = 100$ のとき, 3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。
- (2) 一般の m に対して, (b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。
- (3) 一般の m に対して, Ans を求めよ。