

2001 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (文系)

試 験 時 間 120 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、4 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、200 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (文系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する、点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する、点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 (配点 50 点)

次の問〔A〕, 〔B〕, 〔C〕から 1 問を選択し, 解答紙〔3〕に選択した問題符号 A, B, C のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔A〕

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。 $a_1, \dots, a_n$ の積を P_n とおく。

- (1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。
- (2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。
- (3) $S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$ とおく。 S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。
- (4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

〔B〕

- (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。
- (2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。
- (3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。
- (4) n が自然数のとき, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

〔C〕

r を 1 より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 ℓ 上の点で A からの距離が $1-r, 1, 1+r$ となるものをそれぞれ B, C, D とする。 BD を直径とする円を描き, A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。 m 上の点で A からの距離が $1-r, 1, 1+r$ となるものをそれぞれ E, F, G とする。 E, F を通り ℓ に接する円を描きその接点を P とする。また F, G を通り ℓ に接する円を描きその接点を Q とする。

- (1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。
- (2) CF を r で表せ。
- (3) $PQ = CF$ を示せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問〔D〕, 〔E〕, 〔F〕から 1 問を選択し, 解答紙〔4〕に選択した問題符号 D, E, F のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔D〕

複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す。

- (2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}z(z + 1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

〔E〕

サイコロを n 回振って, 出た目を小さい方から順に並べ, 第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする。

- (1) $n = 7$ のとき, 3 の目が 3 回, 5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して, $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して, X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) 一般の n に対して, 期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

〔F〕

m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (a) $i = m, j = n, k = 0$ 。
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する。
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする。

(d) $i = \lfloor i/2 \rfloor$ 。

(e) $j = 2 * j$ 。

(f) (b) にもどる。

(ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき、3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して、(b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して、Ans を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

