

2000 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (文系)

試 験 時 間 120 分

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子の中にはさみ込まれている解答紙は、4 枚です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に、各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。受験番号は、裏面の記入例にならって、マス目の中に丁寧に記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。小問があるときは、小問の番号を明記して解答しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は、200 点満点です。

受験番号の記入例

A	B	D	E	G	H	I	K	L	M	P	S	T	Z

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

数 学 (文系)

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 1 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

原点を O 、直線 $x = 1$ 上の動点を P 、中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円を C とする。
線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし、 OP 上に $\overline{OR} = \overline{PQ}$ を満たす
点 $R(x, y)$ をとる。

- (1) 点 P を動かしたとき、点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。
- (2) m, n を 100 以下の自然数として、点 $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ が (1) で求めた曲線上にあるような組 (m, n) をすべて求めよ。

(下書き用紙)

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 2 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 p, q, r を係数とする関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ をここでは高々 2 次の関数とよぶことにする。また、 a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1) $f(a) = 1, f(b) = 0, f(c) = 0$ を満たす高々 2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 高々 2 次の関数 $f(x), g(x)$ が

$$f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b), \quad f(c) = g(c)$$

を満たすならば $f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3) $h(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ とすると、

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{h'(a)(x - a)} + \frac{1}{h'(b)(x - b)} + \frac{1}{h'(c)(x - c)}$$

であることを示せ。

(下書き用紙)

〔 3 〕 （配点 50 点）

次の問 **A**, **B**, **C** から 1 問を選択し, 解答紙 **3** に選択した問題符号 A, B, C のいずれかを記入してから解答しなさい。

A

係数が 0 か 1 である x の整式を, ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は, 偶数の係数を 0 でおきかえ, 奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は, このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。例えば, $5x^2 + 4x + 3$ と $x^2 - 1$ とは対応する M 多項式が共に $x^2 + 1$ となるので, 合同である。

M 多項式は, 2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい, 可約でないとき既約であるという。例えば, $x^2 + 1$ は $(x + 1)^2$ と合同であるから, 可約である。

- (1) $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式であることを示せ。
- (2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。
- (3) $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

B

下記の各命題についてその真偽を記し, 理由を述べよ。

- (1) $\sqrt{7}$ は無理数である。
- (2) 和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b は, 共に有理数である。
- (3) 無理数は何乗かすると有理数になる。ただし, ここで何乗かするというのは, n を 1 以上のある整数として n 乗することである。
- (4) 和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a, b に対して, $a^5 + b^5$ は有理数である。

C

正五角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E とし, 線分 AC と BD の交点を F, BD と CE の交点を G, CE と DA の交点を H, DA と EB の交点を I, EB と AC の交点を J とする。

- (1) 三角形 ABF と三角形 AFH は合同な三角形であることを示せ。
- (2) 三角形 ABJ の面積と五角形 $FGHIJ$ の面積はどちらが大きいか検討せよ。
- (3) 星形 $AJBFCGDHEIA$ の面積と、正五角形 $ABCDE$ からその星形を除いた残りの部分の面積は、どちらが大きいか検討せよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問〔D〕, 〔E〕, 〔F〕から1問を選択し, 解答紙〔4〕に選択した問題符号 D, E, F のいずれかを記入してから解答しなさい。

〔D〕

表のでる確率が $\frac{1}{2}$ の公平な (歪みのない) コインが n 枚, 表のでる確率が $\frac{3}{4}$ の歪んだコインが 1 枚ある。公平なコインはそれぞれを 2 回投げ, 2 回共に表がでた場合にそのコインを用意した箱に入れる。また, 歪んだコインは n 回投げて n 回すべてが表であったらその箱に入れる。全部のコインについてこれを行ったとき, 箱に入っているコインの枚数を X とする。

- (1) $n = 2$ のとき, $P(X \geq 1)$ と X の期待値を求めよ。
- (2) $P(X \geq 1) > \frac{13}{16}$ となる最小の n を求めよ。
- (3) X の期待値と分散を n を用いて表せ。

〔E〕

1 から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として, 下記のものを考えた。ただし, S は順列を表し, 算法の開始の時は数を含まない (S は空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 [以下 (a), (b), (c), $\dots$ の順に行う]

- (a) S を空とし, $j = n - m + 1$ とする。
- (b) 1 から j までの数からデタラメに数 t を選ぶ。
- (c) t が順列 S に入っているならば, t の直後に j を入れ, そうでないならば, t を S の先頭に入れる。
- (d) j を 1 増やす。
- (e) $j \leq n$ ならば, (b) へもどる。 $j > n$ ならば, 終了する。

- (1) $n = 10, m = 6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。
- (2) $n = 10, m = 6$ の場合で結果として得られた順列 S が 827593 であった。

- (b) で選ばれた数 t の列は何であったか。
- (3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

F

空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ をとる。

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき, この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1) における定点 Q は 3 点 A , B , C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1) における P について, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

(下書き用紙)

