

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数  $\cos x$ ,  $\sin x$  については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が以下の条件を満たすとする。

- (A) すべての  $x, y$  について  $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$   
 (B) すべての  $x, y$  について  $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$   
 (C)  $f(0) \neq 0$   
 (D)  $f(x)$ ,  $g(x)$  は  $x=0$  で微分可能で  $f'(0) = 0$ ,  $g'(0) = 1$

①条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  がわかる。以上のことから、  
 ② $f(x)$ ,  $g(x)$  はすべての  $x$  の値で微分可能で、 $f'(x) = -g(x)$ ,  $g'(x) = f(x)$  が成立することが示される。③上のことから  $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$  であることが、実部と虚部を調べることによりわかる。ただし、 $i$  は虚数単位である。よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$  であることが示される。

さらに、 $a, b$  を実数で  $b \neq 0$  とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)'  $f(x)$ ,  $g(x)$  は  $x=0$  で微分可能で、 $f'(0) = a$ ,  $g'(0) = b$

におきかえて、条件 (A), (B), (C), (D)' を満たす  $f(x)$ ,  $g(x)$  はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも条件 (A), (B), (C) から  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、④条件 (A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$  を  $p(x)$  に、 $g(x)$  を  $q(x)$  に置きかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x)$ ,  $q(x)$  がまず求まり、このことを用いると  $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ ,  $g(x) = \boxed{\text{イ}}$  が得られる。

- (1) 下線部①について、 $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$  となることを示せ。  
 (2) 下線部②について、 $f(x)$  がすべての  $x$  の値で微分可能な関数であり、 $f'(x) = -g(x)$  となることを示せ。  
 (3) 下線部③について、下線部①、下線部②の事実を用いることにより、 $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i \sin x) = 1$  となることを示せ。  
 (4) 下線部④について、条件 (B), (D) において、 $f(x)$  を  $p(x)$  に、 $g(x)$  を  $q(x)$  におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり  $p(x)$  と  $q(x)$  が、

(B) すべての  $x, y$  について  $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

(D)  $p(x)$ ,  $q(x)$  は  $x=0$  で微分可能で  $p'(0) = 0$ ,  $q'(0) = 1$

を満たすことを示せ。また空欄  $\boxed{\text{ア}}$ ,  $\boxed{\text{イ}}$  に入る関数を求めよ。